Ejercicios Mecánica Teórica. Capítulo 42

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

19 de septiembre de 2019

1. Cálculo del Corchete de Poisson $\{H, a_k^*\}$

Sabemos que el Hamiltoniano viene dado por

$$H = \frac{1}{2}\int \pi^2 + (\phi')^2 + m^2\phi^2 \,\mathrm{d}x \tag{1}$$

Y a_k^* viene dada por

$$a_k^* = \int (\omega_k \phi(x) - i\pi(x)) e^{-i(\omega_k t - kx)} \,\mathrm{d}x \tag{2}$$

Queremos calcular los corchetes de Poisson, definidos como

$$\{H, a_k^*\} = \int \frac{\delta H}{\delta\phi(x)}\frac{\delta a_k^*}{\delta\pi(x)} - \frac{\delta a_k^*}{\delta\phi(x)}\frac{\delta H}{\delta\pi(x)} \,\mathrm{d}x \tag{3}$$

Empecemos por calcular las derivadas funcionales de a_k^*, dado que a_k^* solo depende de los campos, i no de las derivadas, tenemos que, según el capítulo 37:

$$a_k^* = F(\phi, \pi) = \int G(\phi, \pi) \,\mathrm{d}x \Longrightarrow \frac{\delta a_k^*}{\delta\phi(x)} = \frac{\partial G(\phi, \pi)}{\partial\phi}, \quad \frac{\delta a_k^*}{\delta\pi(x)} = \frac{\partial G(\phi, \pi)}{\partial\pi} \tag{4}$$

Podemos identificar la función G como

$$G(\phi, \pi) = (\omega_k\phi - i\pi)\, e^{-i(\omega_k t - kx)} \tag{5}$$

Por lo que;

$$\frac{\delta a_k^*}{\delta\phi(x)} = \frac{\partial G(\phi, \pi)}{\partial\phi} = \omega_k e^{-i(\omega_k t - kx)}, \qquad \frac{\delta a_k^*}{\delta\pi(x)} = \frac{\partial G(\phi, \pi)}{\partial\pi} = -ie^{-i(\omega_k t - kx)} \tag{6}$$

Ahora, H es un poco más complicado porqué

$$H = F(\phi, \pi) = \int G(\phi, \phi', \pi) \,\mathrm{d}x\,, \qquad G(\phi, \phi', \pi) = \frac{1}{2}\left(\pi^2 + (\phi')^2 + m^2\phi^2\right) \tag{7}$$

Por lo que, según el capítulo 37 tenemos

$$\frac{\delta H}{\delta\pi(x)} = \frac{\partial G}{\partial\pi} = \pi(x) \tag{8}$$

$$\frac{\delta H}{\delta\phi(x)} = \frac{\partial G}{\partial\phi(x)} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial\phi'(x)}\right) = m^2\phi(x) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\phi'(x)\right) = m^2\phi(x) - \phi''(x) \tag{9}$$

Usando todo esto en la ecuación (3)

$$\{H, a_k^*\} = \int \left(m^2\phi(x) - \phi''(x)\right)\left(-ie^{-i(\omega_k t - kx)}\right) - \left(\omega_k e^{-i(\omega_k t - kx)}\right)\pi(x) \,\mathrm{d}x \tag{10}$$

$$= -i\omega_k \int \left[\frac{\left(m^2\phi(x) - \phi''(x)\right)}{\omega_k} - i\pi(x)\right] e^{-i(\omega_k t - kx)} \,\mathrm{d}x \tag{11}$$

$$= -i\omega_k \int \left[\omega_k\phi(x) - i\pi(x)\right] e^{-i(\omega_k t - kx)} \,\mathrm{d}x + i\int \left[k^2\phi(x) + \phi''(x)\right] e^{-i(\omega_k t - kx)} \,\mathrm{d}x \tag{12}$$

$$= -i\omega_k a_k^* + i\int \left[k^2\phi(x) + \phi''(x)\right] e^{-i(\omega_k t - kx)} \,\mathrm{d}x \tag{13}$$

Finalmente solo tenemos que calcular la segunda derivada $\phi''(x)$, tenemos

$$\phi(x) = \int \left[a_q e^{-i(\omega_q t - qx)} + a_q^* e^{i(\omega_q t - qx)}\right] \frac{\mathrm{d}q}{2\pi 2\omega_q} \tag{14}$$

$$\phi'(x) = \int iq \left[a_q e^{-i(\omega_q t - qx)} - a_q^* e^{i(\omega_q t - qx)}\right] \frac{\mathrm{d}q}{2\pi 2\omega_q} \tag{15}$$

$$\phi''(x) = \int -q^2 \left[a_q e^{-i(\omega_q t - qx)} + a_q^* e^{i(\omega_q t - qx)}\right] \frac{\mathrm{d}q}{2\pi 2\omega_q} \tag{16}$$

Lo cual es muy buena señal porque entonces tenemos que

$$\left[k^2\phi(x) + \phi''(x)\right] = \int (k^2 - q^2) \left[a_q e^{-i(\omega_q t - qx)} + a_q^* e^{i(\omega_q t - qx)}\right] \frac{\mathrm{d}q}{2\pi 2\omega_q} \tag{17}$$

Ahora al multiplicar por $e^{-i(\omega_k t - kx)}$ e integrar x nos aparecerán deltas que impondrán $q = k$ o $q = -k$, en cualquier caso este término será cero, vamos a hacerlo con más calma; la integral que queremos hacer es:

$$\int (k^2 - q^2) \left[a_q e^{-i(\omega_q t - qx)} e^{-i(\omega_k t - kx)} + a_q^* e^{i(\omega_q t - qx)} e^{-i(\omega_k t - kx)}\right] \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}q}{2\pi 2\omega_q} \tag{18}$$

$$= \int (k^2 - q^2) \left[a_q \vec{\mathbf{e}}_q^* \cdot \vec{\mathbf{e}}_k + a_q^* \vec{\mathbf{e}}_q \cdot \vec{\mathbf{e}}_k\right] \frac{\mathrm{d}q}{2\pi 2\omega_q} \tag{19}$$

$$= \int (k^2 - q^2) \left[a_q 2\pi\delta(k+q) e^{-2i\omega_k t} + a_q^* 2\pi\delta(q-k)\right] \frac{\mathrm{d}q}{2\pi 2\omega_q} = 0 \tag{20}$$

Donde he usado los resultados del capítulo 41 para los productos $\vec{\mathbf{e}}_q \cdot \vec{\mathbf{e}}_k$ y $\vec{\mathbf{e}}_q^* \cdot \vec{\mathbf{e}}_k$

2. Cálculo del Corchete de Poisson $\{H, a_k\}$

Para este caso vamos a proceder de tres formas distintas:

2.1. Definición

Esencialmente vamos a repetir el mismo proceso que la sección anterior, pero cambiando a_k^* por a_k que viene dada por la expresión

$$a_k = \int (\omega_k \phi(x) + i\pi(x)) e^{i(\omega_k t - kx)}\,\mathrm{d}x \tag{21}$$

Por lo que, las derivadas funcionales son

$$\frac{\delta a_k}{\delta\phi(x)} = \frac{\partial G(\phi,\pi)}{\partial\phi} = \omega_k e^{i(\omega_k t - kx)}, \qquad \frac{\delta a_k}{\delta\pi(x)} = \frac{\partial G(\phi,\pi)}{\partial\pi} = i e^{i(\omega_k t - kx)} \tag{22}$$

Introduciendo esto en la definición (3)

$$\{H, a_k\} = \int \left(m^2\phi(x) - \phi''(x)\right)\left(i e^{i(\omega_k t - kx)}\right) - \left(\omega_k e^{i(\omega_k t - kx)}\right)\pi(x)\,\mathrm{d}x \tag{23}$$

$$= i\omega_k \int \left[\frac{\left(m^2\phi(x) - \phi''(x)\right)}{\omega_k} + i\pi(x)\right] e^{i(\omega_k t - kx)}\,\mathrm{d}x \tag{24}$$

$$= i\omega_k \int \left[\omega_k\phi(x) + i\pi(x)\right] e^{i(\omega_k t - kx)}\,\mathrm{d}x - i\int \left[k^2\phi(x) + \phi''(x)\right] e^{i(\omega_k t - kx)}\,\mathrm{d}x \tag{25}$$

$$= i\omega_k a_k - i\int \left[k^2\phi(x) + \phi''(x)\right] e^{i(\omega_k t - kx)}\,\mathrm{d}x = i\omega_k a_k \tag{26}$$

Pues el segundo término se anula por la misma razón que en el caso anterior.

2.2. Propiedades Corchete Poisson

Usando las propiedades de los corchetes de Poisson con las definiciones

$$H = \frac{1}{8\pi}\int (a_k^* a_k + a_k a_k^*)\,\mathrm{d}k \tag{27}$$

$$\{H, a_k\} = \left\{\frac{1}{8\pi}\int (a_q^* a_q + a_q a_q^*)\,\mathrm{d}q\,, a_k\right\} = \frac{1}{8\pi}\int \left\{a_q^* a_q + a_q a_q^*, a_k\right\}\mathrm{d}q \tag{28}$$

El corchete se puede calcular como

$$\left\{a_q^* a_q + a_q a_q^*, a_k\right\} = \left\{a_q^* a_q, a_k\right\} + \left\{a_q a_q^*, a_k\right\} = \left\{a_q^*, a_k\right\}a_q + a_q\left\{a_q^*, a_k\right\} \tag{29}$$

$$= 4\pi i\omega_k\delta(q-k)a_q + 4\pi i\omega_k\delta(q-k)a_q = 8\pi i\omega_k\delta(q-k)a_q \tag{30}$$

Por lo que es resultado es

$$\{H, a_k\} = \frac{1}{8\pi}\int 8\pi i\omega_k\delta(q-k)a_q\,\mathrm{d}q = i\omega_k\int \delta(q-k)a_q\,\mathrm{d}q = i\omega_k a_k \tag{31}$$

2.3. Conjugando

Finalmente, vamos a hacer la forma más sencilla de todas, aprovechar que $a_k = (a_k^*)^*$ y que

$$H^* = \frac{1}{8\pi}\int (a_k^* a_k + a_k a_k^*)^*\,\mathrm{d}k = \frac{1}{8\pi}\int (a_k^* a_k + a_k a_k^*)\,\mathrm{d}k = H \tag{32}$$

Por lo que,

$$\{H, a_k\} = \{H^*, a_k^*\}^* = \{H, a_k^*\}^* = (-i\omega_k a_k^*)^* = i\omega_k a_k \tag{33}$$